ترتيب تنفيذ العمليات الحسابية المختلفة - الشرح

قد نضطرّ في الامتحان تبسيط صيغ جبريّة. حتّى نتوصّل إلى الصّيغة النّهائيّة بالصّورة الصّحيحة، علينا القيام بعمليّة التّبسيط وفق ترتيب معيّن. الصّيغ الجبريّة المختلفة يمكنها أن تحوي العمليّات الحسابيّة الأربع (الجمع، الطّرح، الضّرب، والقسمة)، بالإضافة إلى الأقواس والجذور.

خلال الحلّ أو التّبسيط، نقوم بالعمل حسب التّرتيب التّالي:

1. نبسّط أوّلاً التّعابير الموجودة داخل الأقواس (نبدأ بالأقواس من الأصغر إلى الأكبر).
2. نحسب القوى والجذور.
3. نحسب الضّرب والقسمة.
4. نحسب الجمع والطرح.

مثال

$$6\times1^4-3\times\left(4-2^2\right)^3=?$$

الحلّ

مرحلة 1: نبسّط التّعبير داخل الأقواس، في التّعبير نفسه، نبدأ بحساب القوّة، ثمّ ننفّذ عمليّة الطّرح:

$$2^2=4\ \rightarrow\ 4-2^2=4-4=0$$

من هنا، يُصبح التّعبير:

$$6\times1^4-3\times0^3=?$$

مرحلة 2: نقوم الآن بحساب القوى:

$$1^4=1\ ,\ 0^3=0$$

من هنا، يُصبح التّعبير:

$$6\times1-3\times0=?$$

مرحلة 3: نقوم الآن بحساب عمليّة الضّرب:

$$6\times1=6\ ,\ 3\times0=0$$

من هنا، يُصبح التّعبير:

$$6-0=?$$

المرحلة الأخيرة: نقوم بإجراء عمليّة الطّرح:

$$6-0=6$$

ترتيب تنفيذ العمليات الحسابية المختلفة - الأسئلة

جِد قيمة كلٍّ من التّعابير الرّياضيّة التّالية (مع الأخذ بعين الاعتبار ترتيب تنفيذ العمليّات الحسابيّة المختلفة)

1. $27 \div 3^2 \times \left(1+5-2^2\right) =$

2. $36 \div [3^2 - 4]^3 = ?$

3. $7 \cdot [5-(4^2-14)^2] =$

4. $9+3 \cdot [(11-8)^2 - 7] =$

5. $25+6 \cdot [(21-22)^2 + 2] =$

6. $59-8 \cdot [(14+2-15)^2 + 6] =$

7. $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) \div \frac{7}{8} =$

8. $\frac{1}{6} \div \frac{2}{12} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} =$

9. $\left(\frac{11}{22}-\frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{4} \div \frac{1}{8} =$

10. $\left(\frac{15}{21}-\frac{3}{7}\right) \div \frac{1}{7} \times \frac{5}{9} =$

11. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \div \frac{2}{8} - \frac{1}{5} =$

12. $\left(2^3 - 3^2\right)^0 =$

13. $\left(2^4 - 15\right)^2 =$

14. $\left(6^2 + 3\right)^{(-1)} =$

15. $A^2 + A^8 \times \frac{A^3}{A^9} =$

16. $A^x \times A^{-x} + 3 =$

17. $\left(2A\right)^2 \times A^{(-1)} \div \frac{4}{5A} =$

18. $\left(\frac{16A}{4}\right)^2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \left(\frac{A^5}{A^4}\right)^2 =$

19. $7^5 \times 7^{(-4)} \times 7^0 - 6^3 \times \frac{1}{36} =$

20. $17^0 + 2^0 \times 5^6 \times 10^{(-6)} \times 2^5 =$

21. $\sqrt{625} + 2 \times \sqrt[3]{125} =$

22. $\sqrt{54} - \sqrt{24} =$

23. $\sqrt{12} + \sqrt{27} =$

24. $\sqrt{\frac{3^5}{3^3}} \times 2 =$

25. $\sqrt{25}x - \sqrt{16x^2} =$

ترتيب تنفيذ العمليات الحسابية المختلفة - الحلول المفصلة

1. $27\div3^2\times\left(1+5-2^2\right)\to27\div3^2\times(1+5-4)\to27\div3^2\times2\to27\div9\times2\to3\times2\to6$

---

2. $36\div\left[3^2-4\right]^3\to36\div[9-4]^3\to36\div5^3\to36\div125\to\frac{36}{125}$

---

3. $7\times\left[5-\left(4^2-14\right)^2\right]\to7\times\left[5-(16-14)^2\right]\to7\times\left[5-2^2\right]\to7\times[5-4]\to7\times1\to7$

---

4. $9+3\times\left[(11-8)^2-7\right]\to9+3\times\left[(3)^2-7\right]\to9+3\times[9-7]\to9+3\times2\to9+6\to15$

---

5. $25+6\times\left[(21-22)^2+2\right]\to25+6\times\left[(-1)^2+2\right]\to25+6\times[1+2]\to25+6\times3\to25+18\to43$

---

6. $59-8\times\left[(14+2-15)^2+6\right]\to59-8\times\left[(1)^2+6\right]\to59-8\times[1+6]\to59-8\times7\to59-56\to3$

---

7. $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)\div\frac{7}{8}\to\left(\frac{1\times3}{4\times3}+\frac{1\times4}{3\times4}\right)\times\frac{8}{7}\to\left(\frac{3}{12}+\frac{4}{12}\right)\times\frac{8}{7}\to\left(\frac{3+4}{12}\right)\times\frac{8}{7}\to\frac{7}{12}\times\frac{8}{7}$

$\frac{7}{12}\times\frac{8}{7}\to\frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{3}{\cancel{12}}}\times\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{7}}}\to\frac{1}{3}\times\frac{2}{1}\to\frac{1\times2}{3\times1}\to\frac{2}{3}$

---

8. $\frac{1}{6}\div\frac{2}{12}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ \Rightarrow\ \left(\frac{2}{12}=\frac{1}{6}\right)\ \Rightarrow\ \left(\frac{1}{6}\div\frac{2}{12}=1\right)\ \Rightarrow\ 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\to\frac{1\times8}{1\times8}-\frac{1\times2}{4\times2}+\frac{1\times1}{8\times1}\to\frac{8}{8}-\frac{2}{8}+\frac{1}{8}\to\frac{8-2+1}{8}\to\frac{7}{8}$

---

9. $\left(\frac{11}{22}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{4}\div\frac{1}{8}\ \Rightarrow\ \frac{11}{22}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{4}\div\frac{1}{8}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\to\frac{1\times3}{2\times3}-\frac{1\times2}{3\times2}\to\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\to\frac{3-2}{6}\to\frac{1}{6}\ \Rightarrow\ \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{4}\div\frac{1}{8}\to\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}\div\frac{1}{8}$

$\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}\div\frac{1}{8}\to\frac{1}{\underset{2}{\cancel{6}}}\times\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{4}}}\times\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{1}\to\frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}\times\frac{1}{1}\times\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{1}\to1$

---

10. $\left(\frac{15}{21}-\frac{3}{7}\right)\div\frac{1}{7}\times\frac{5}{9} \Rightarrow \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{7}{\cancel{21}}}-\frac{3}{7}\rightarrow\frac{5}{7}-\frac{3}{7}\rightarrow\frac{2}{7} \Rightarrow \frac{2}{7}\div\frac{1}{7}\times\frac{5}{9}$

$\frac{2}{7}\div\frac{1}{7}\times\frac{5}{9}\rightarrow\frac{2}{\underset{1}{\cancel{7}}}\times\frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{1}\times\frac{5}{9}\rightarrow\frac{2}{1}\times\frac{1}{1}\times\frac{5}{9}\rightarrow\frac{2\times5}{9}\rightarrow\frac{10}{9}$

---

11. $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\div\frac{2}{8}-\frac{1}{5} \rightarrow\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\div\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{4}{\cancel{8}}}-\frac{1}{5}\rightarrow\frac{1}{\underset{1}{\cancel{4}}}\times\frac{1}{2}\times\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{1}-\frac{1}{5}\rightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\rightarrow\frac{5}{10}-\frac{2}{10}\rightarrow\frac{3}{10}$

---

12. $\left(2^3-3^2\right)^0\rightarrow\left(9-8\right)^0\rightarrow1^0\rightarrow1$

---

13. $\left(2^4-15\right)^2\rightarrow\left(16-15\right)^2\rightarrow1^2\rightarrow1$

---

14. $\left(6^2+3\right)^{(-1)}\rightarrow\left(36+3\right)^{(-1)}\rightarrow39^{(-1)}\rightarrow\frac{1}{39}$

---

15. $A^2+A^8\times\frac{A^3}{A^9}\rightarrow A^2+A^{8+3-9}\rightarrow A^2+A^2\rightarrow2A^2$

---

16. $A^x\times A^{(-x)}+3\rightarrow A^{x+(-x)}+3\rightarrow A^0+3\rightarrow1+3\rightarrow4$

---

17. $\left(2A\right)^2\times A^{(-1)}\div\frac{4}{5A}\rightarrow2^2\times A^2\times\frac{1}{A}\times\frac{5A}{4}\rightarrow\frac{\overset{1}{\cancel{4}}\times A^2\times5\times A}{A\times\underset{1}{\cancel{4}}}\rightarrow A^{2+1-1}\times5\rightarrow5A^2$

---

18. $\left(\frac{16A}{4}\right)^2\times\frac{1}{8}+3\times\left(\frac{A^5}{A^4}\right)^2\rightarrow\frac{\left(4A\right)^2}{8}+3\times\left(A^{5-4}\right)^2\rightarrow\frac{\left(2^2A\right)^2}{2^3}+3A^2\rightarrow\frac{2^{2\times2}A^2}{2^3}+3A^2$

$\rightarrow\frac{2^4A^2}{2^3}+3A^2\rightarrow2^{4-3}A^2+3A^2\rightarrow2A^2+3A^2\rightarrow5A^2$

---

19. $7^5\times7^{(-4)}\times7^0-6^3\times\frac{1}{36}\rightarrow7^{5+(-4)+0}-\frac{6^3}{6^2}\rightarrow7^1-6^{3-2}\rightarrow7-6^1\rightarrow1$

---

20. $17^0+2^0\times5^6\times10^{(-6)}\times2^5\rightarrow1+1\times5^6\times\left(5\times2\right)^{(-6)}\times2^5\rightarrow1+5^6\times5^{(-6)}\times2^{(-6)}\times2^5$

$\rightarrow1+5^{6+(-6)}\times2^{(-6)+5}\rightarrow1+5^0\times2^{(-1)}\rightarrow1+1\times\frac{1}{2}\rightarrow1\frac{1}{2}$

---

21. $\sqrt{625}+2\times\sqrt[3]{125}\rightarrow 25+2\times 5\rightarrow 25+10\rightarrow 35$

22. $\sqrt{54}-\sqrt{24}\rightarrow\sqrt{9\times 6}-\sqrt{4\times 6}\rightarrow\sqrt{9}\times\sqrt{6}-\sqrt{4}\times\sqrt{6}\rightarrow 3\sqrt{6}-2\sqrt{6}\rightarrow\sqrt{6}$

23. $\sqrt{12}+\sqrt{27}\rightarrow\sqrt{4\times 3}+\sqrt{9\times 3}\rightarrow\sqrt{4}\times\sqrt{3}+\sqrt{9}\times\sqrt{3}\rightarrow 2\sqrt{3}+3\sqrt{3}\rightarrow 5\sqrt{3}$

24. $\sqrt{\frac{3^5}{3^3}}\times 2\rightarrow\sqrt{3^{5-3}}\times 2\rightarrow\sqrt{3^2}\times 2\rightarrow 3^{\frac{2}{2}}\times 2\rightarrow 3^1\times 2\rightarrow 6$

25. $\sqrt{25}x-\sqrt{16x^2}\rightarrow 5x-\sqrt{16}\cdot\sqrt{x^2}\rightarrow 5x-4\cdot x^{\frac{2}{2}}\rightarrow 5x-4x\rightarrow x$

القيمة المطلقة - الشرح

القيمة المطلقة هي صيغة جبريّة علينا معرفتها ومعرفة التّعامُل معها، وهي تُعدّ من الصّيغ الجبريّة الأساسيّة.

القيمة المطلقة تُعبّر عن بُعد العدد عن الصّفر، ومن ناحيّة كتابيّة، فهي تُكتب على النّحو التّالي؛ القيمة المطلقة للعدد A تُكتب كَ $|A|$.

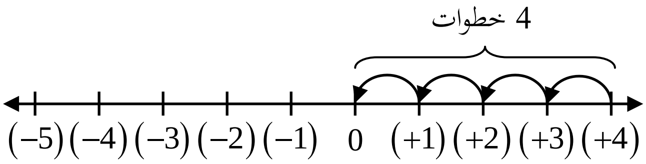
ما هي القيمة الجبريّة العدديّة للقيمة المطلقة ؟

لنشرح ذلك سنقوم بالتّجزئة لحالتَين؛ القيمة المطلقة للأعداد الموجبة، والقيمة المطلقة للأعداد السّالبة.

❶ القيمة المطلقة للأعداد الموجبة

قُلنا إنّ القيمة المطلقة تمثّل بُعد العدد عن الصّفر، من هنا ما هي القيمة العدديّة للتّعبير $|(+4)|$ مثلاً ؟

$|(+4)|$ = بُعد العدد $(+4)$ عن الصّفر، لننظر إلى محور الأعداد، ونجد القيمة العدديّة لهذا التّعبير؛



من الرّسم التّوضيحيّ يظهر أنّ بُعد العدد $(+4)$ عن الصّفر هو 4 خطوات، لذلك ← $|(+4)| = 4$.

وبشكل عامّ، القيمة المطلقة لعدد موجب تساوي العدد نفسه.

أمثلة

$|5|$ ← بُعد الرّقم 5 عن الصّفر ← الرّقم 5 يبعد عن الصّفر بمقدار 5 خطوات، إذًا $|5| = 5$.

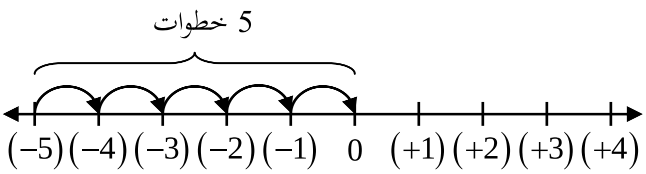
$|23|$ ← بُعد العدد 23 عن الصّفر ← العدد 23 يبعد عن الصّفر بمقدار 23 خطوة، إذًا $|23| = 23$.

$|100|$ ← بُعد العدد 100 عن الصّفر ← العدد 100 يبعد عن الصّفر بمقدار 100 خطوة، إذًا $|100| = 100$.

❷ القيمة المطلقة للأعداد السّالبة

لا يوجد بُعد سالب، وبالتّالي القيمة المطلقة للعدد السّالب بالتّأكيد لا تساويه، فماذا تساوي إذًا ؟ مثلاً، ماذا تساوي الصّيغة $|(-5)|$ ؟

أيضًا للإجابة على السّؤال لننظر إلى محور الأعداد، ونجد ما هو بُعد العدد (-5) عن الصّفر؛



من الرّسم التّوضيحيّ نستنتج أنّ الرّقم (-5) يبعد عن الصّفر بمقدار 5 خطوات، من هنا $\leftarrow$ $|(-5)| = 5$.

وبشكل عامّ، القيمة المطلقة لعدد سالب تساوي العدد نفسه دون إشارة السّالب، بكلمات أخرى تساوي مضادّ العدد.

أمثلة

$|(-10)|$ $\leftarrow$ بُعد العدد (-10) عن الصّفر $\leftarrow$ العدد (-10) يبعُد عن الصّفر بمقدار 10 خطوات، إذًا $|(-10)| = 10$.

$|(-47)|$ $\leftarrow$ بُعد العدد (-47) عن الصّفر $\leftarrow$ العدد (-47) يبعد عن الصّفر بمقدار 47 خطوة، إذًا $|(-47)| = 47$.

$|(-1000)|$ $\leftarrow$ بُعد العدد (-1000) عن الصّفر $\leftarrow$ العدد (-1000) يبعد عن الصّفر بمقدار 1000 خطوة، إذًا $|(-1000)| = 1000$.

ما هي أصغر قيمة ممكنة للقيمة المطلقة ؟

القيمة المطلقة تمثّل بُعد العدد عن الصّفر، أصغر بُعد ممكن هو 0، ولذلك أصغر قيمة ممكنة للقيمة المطلقة هي 0.

دائمًا تذكّر –

✓ **القيمة المطلقة؛**

1. **القيمة المطلقة هي صيغة جبريّة تمثّل بُعد العدد عن الصّفر.**
2. **القيمة المطلقة للعدد الموجب تساوي العدد نفسه.**
3. **القيمة المطلقة للعدد السّالب تساوي العدد نفسه دون إشارة السّالب (أي تساوي مضادّ العدد).**
4. **أصغر قيمة ممكنة للقيمة المطلقة هي 0.**

إليكم بعض الأمثلة لأسئلة تتطرّق للتّعامل مع القيمة المطلقة؛

مثال

معطى أنّ قيمة الصّيغة الجبريّة $|x|$ هي 10.

ما هي قيم الصّيغة الجبريّة $2 - x$ الممكنة ؟

الحلّ

معطى أنّ قيمة الصّيغة $|x|$ هي 10، أي أنّ x هو عدد بُعده عن الصّفر هو 10 خطوات. ما هي الأعداد الّتي بُعدها عن الصّفر هو 10 ؟ ← هنالك إمكانيّتان؛ إمّا أن يكون x يساوي 10 أو (-10)، وذلك لأنّه في الحالتَين بُعد العدد عن الصّفر هو 10 خطوات.

في حالة كان x يساوي 10 عندها قيمة الصّيغة $2-x$ ستكون؛ $2-10=8$.

في حالة كان x يساوي (-10) عندها قيمة الصّيغة $2-x$ ستكون؛ $2-(-10)=(-12)$.

إذًا، قيم الصّيغة الجبريّة $2-x$ الممكنة هي 8 أو (-12).

مثال

ما هي **أكبر** قيمة ممكنة للصّيغة الجبريّة $|x+5|$، إذا علمتَ أنّ قيمة العدد x أكبر أو تساوي $(+15)$ وأصغر أو تساوي (-15) ؟

الحلّ

الصّيغة الجبريّة $|x+5|$ تمثّل بُعد العدد $(x+5)$ عن الصّفر، كلّما كان بُعد هذا العدد عن الصّفر أكبر، تكون إذًا قيمة التّعبير $|x+5|$ أكبر. لذلك، نحن نبحث عن متى يكون بُعد العدد $(x+5)$ عن الصّفر أكبر ما يكون، مع المعطى أنّ قيمة العدد x أكبر أو تساوي $(+15)$ وأصغر أو تساوي (-15).

يبعُد العدد $(x+5)$ عن الصّفر أكثر كلّما كان العدد x أبعد عن الصّفر بالموجب، أو أبعد عن الصّفر بالسّالب. بكلمات أخرى، يكون بُعده عن الصّفر أكبر كلّما كان x أكبر بالموجب، أو أصغر بالسّالب.

أكبر قيمة للعدد x بالموجب ضمن المجال المعطى هي عندما يكون يساوي $(+15)$، وعندها ستكون قيمة العدد $(x+5)$ ← $((+15)+5)=(+20)$، وعندها؛ $|(+20)|=20$.

أصغر قيمة للعدد x بالسّالب ضمن المجال المعطى هي عندما يكون يساوي (-15)، وعندها ستكون قيمة العدد $(x+5)$ ← $((-15)+5)=(-10)$، وعندها؛ $|(-10)|=10$.

$20>10$ ولذلك، أكبر بُعد للعدد $(x+5)$ عن الصّفر ضمن المجال المعطى هو 20 ← أكبر قيمة ممكنة للصّيغة الجبريّة $|x+5|$ ضمن المجال المعطى هي 20.

مثال

ما هي **أصغر** قيمة ممكنة للصّيغة الجبريّة $|x+5|$، إذا علمتَ أنّ قيمة العدد x أكبر أو تساوي $(+15)$ وأصغر أو تساوي (-15) ؟

الحلّ

ذكرنا أنّ أصغر قيمة ممكنة للقيمة المطلقة هي 0. هل من الممكن في هذه الحالة أن تكون قيمة الصّيغة $(x+5)$ تساوي 0 ؟ تكون قيمة الصّيغة $(x+5)$ تساوي 0 إذا كان قيمة العدد x هي (-5)، لأنّه عندها سنحصل على؛ $5+(-5)=0$. العدد (-5) يدخل في مجال العدد x المعطى في السّؤال. من هنا نستنتج أنّه من الممكن أن تكون قيمة الصّيغة $(x+5)$ تساوي 0، وفي هذه الحالة ستكون قيمة الصّيغة $|x+5|$ تساوي 0، وهي أصغر قيمة ممكنة في المجال المعطى.

مثال

معطى أنّ قيمة الصّيغة الجبريّة $|x-1|$ هي 1. ما هي قيم العدد x الممكنة ؟

الحلّ

$1=|x-1|$ ← بُعد العدد $(x-1)$ عن الصّفر هو 1. من هنا، إمّا أن تكون قيمة العدد $(x-1)$ تساوي 1، أو أن تكون قيمته تساوي (-1).

متى تكون قيمة العدد $(x-1)$ تساوي 1 ؟ ← في حالة كان العدد x يساوي 2، لأنّه حينها سنحصل على؛ $1=2-1$.

متى تكون قيمة العدد $(x-1)$ تساوي (-1) ؟ ← في حالة كان العدد x يساوي 0، لأنّه حينها سنحصل على؛ $(-1)=0-1$.

إذًا، قيم العدد x الممكنة هي 2 أو 0.

أمامكم الآن أعزّاءنا بعض الأسئلة المتعلّقة بالقيمة المطلقة للتّمرُّن، قوموا بحلّها للتتأكّدوا من أنّكم فهمتم الموضوع...

القيمة المطلقة - الأسئلة

.1 معطى أنّ قيمة الصّيغة الجبريّة $|x|$ هي 5 . ما هي قيم الصّيغة الجبريّة $(x+5)$ الممكنة ؟

.2 معطى أنّ قيمة الصّيغة الجبريّة $|A|$ هي 7 . ما هي قيم الصّيغة الجبريّة $(A-10)$ الممكنة ؟

.3 ما هي **أكبر** قيمة ممكنة للصّيغة الجبريّة $|B+10|$، إذا علمت أنّ قيمة العدد B أكبر أو تساوي (-15) وأصغر أو تساوي $(+15)$ ؟

.4 ما هي **أصغر** قيمة ممكنة للصّيغة الجبريّة $|B+10|$، إذا علمت أنّ قيمة العدد B أكبر أو تساوي (-15) وأصغر أو تساوي $(+15)$ ؟

.5 ما هي **أكبر** قيمة ممكنة للصّيغة الجبريّة $\left|\frac{m}{10}\right|$، إذا علمت أنّ قيمة العدد m أكبر أو تساوي (-20) وأصغر أو تساوي $(+20)$ ؟

.6 ما هي **أصغر** قيمة ممكنة للصّيغة الجبريّة $\left|\frac{m}{10}\right|$، إذا علمت أنّ قيمة العدد m أكبر أو تساوي (-20) وأصغر أو تساوي $(+20)$ ؟

.7 ما هي **أكبر** قيمة ممكنة للصّيغة الجبريّة $|10-T|$، إذا علمت أنّ قيمة العدد T أكبر أو تساوي (-5) وأصغر أو تساوي $(+5)$ ؟

.8 ما هي **أصغر** قيمة ممكنة للصّيغة الجبريّة $|10-T|$، إذا علمت أنّ قيمة العدد T أكبر أو تساوي (-5) وأصغر أو تساوي $(+5)$ ؟

.9 معطى أنّ قيمة الصّيغة الجبريّة $|x-5|$ هي 5 . ما هي قيم العدد x الممكنة ؟

.10 معطى أنّ قيمة الصّيغة الجبريّة $|5-x|$ هي 5 . ما هي قيم العدد x الممكنة ؟

القيمة المطلقة - الحلول المفصلة

1. بُعد العدد x عن الصّفر هو 5 خطوات ← العدد x ممكن أن يكون $(+5)$ أو (-5).

في حالة كانت قيمة العدد x هي $(+5)$، عندها تكون قيمة الصّيغة الجبريّة $(x+5)$ هي؛ $5+(+5)=(+10)$.

في حالة كانت قيمة العدد x هي (-5)، عندها تكون قيمة الصّيغة الجبريّة $(x+5)$ هي؛ $5+(-5)=0$.

إذًا، قيم الصّيغة الجبريّة $(x+5)$ الممكنة هي $(+10)$ أو 0.

---

2. بُعد العدد A عن الصّفر هو 7 خطوات ← العدد A ممكن أن يكون $(+7)$ أو (-7).

في حالة كانت قيمة العدد A هي $(+7)$، عندها تكون قيمة الصّيغة الجبريّة $(10-A)$ هي؛ $10-(+7)=(+3)$.

في حالة كانت قيمة العدد A هي (-7)، عندها تكون قيمة الصّيغة الجبريّة $(10-A)$ هي؛ $10-(-7)=(+17)$.

إذًا، قيم الصّيغة الجبريّة $(10-A)$ الممكنة هي $(+3)$ أو $(+17)$.

---

3. كلّما كانت قيمة العدد B أكبر بالموجب أو أصغر بالسّالب، سيكون بُعد العدد $(10+B)$ عن الصّفر أكبر، وبالتّالي ستكون قيمة الصّيغة الجبريّة $|10+B|$ أكبر.

أكبر قيمة موجبة ممكنة للعدد B في المجال المعطى هي $(+15)$، وبالتّالي قيمة العدد $(10+B)$ ستكون $10+(+15)=(+25)$. أي أنّه حينها قيمة الصّيغة الجبريّة $|10+B|$ ستكون $|(+25)|=25$.

أصغر قيمة سالبة ممكنة للعدد B في المجال المعطى هي (-15)، وبالتّالي قيمة العدد $(10+B)$ ستكون $10+(-15)=(-5)$. أي أنّه حينها قيمة الصّيغة الجبريّة $|10+B|$ ستكون $|(-5)|=5$.

$25>5$ ولذلك، أكبر بُعد للعدد $(10+B)$ عن الصّفر ضمن المجال المعطى هو 25 ← أكبر قيمة ممكنة للصّيغة الجبريّة $|10+B|$ ضمن المجال المعطى هي 25.

---

4. أصغر قيمة ممكنة للقيمة المطلقة هي 0. هل من الممكن في هذه الحالة أن تكون قيمة الصّيغة $(10+B)$ تساوي 0 ؟ تكون قيمة الصّيغة $(10+B)$ تساوي 0 إذا كان قيمة العدد B هي (-10)، لأنّه عندها سنحصل على؛ $10+(-10)=0$. العدد (-10) يدخل في مجال العدد B المعطى في السّؤال. من هنا نستنتج أنّه من الممكن أن تكون قيمة الصّيغة $(10+B)$ تساوي 0، وفي هذه الحالة ستكون قيمة الصّيغة $|10+B|$ تساوي 0، وهي أصغر قيمة ممكنة في المجال المعطى.

---

5. كما في سؤال رقم 3، أيضًا هنا كلّما كانت قيمة العدد m أكبر بالموجب أو أصغر بالسّالب، سيكون بُعد العدد $\left(\frac{m}{10}\right)$ عن الصّفر أكبر، وبالتّالي ستكون قيمة الصّيغة الجبريّة $\left|\frac{m}{10}\right|$ أكبر.

أكبر قيمة موجبة ممكنة للعدد m في المجال المعطى هي $(+20)$، وبالتّالي قيمة العدد $\left(\frac{m}{10}\right)$ ستكون $\frac{(+20)}{10}=(+2)$. أي أنّه حينها قيمة الصّيغة الجبريّة $\left|\frac{m}{10}\right|$ ستكون $|(+2)|=2$.

أصغر قيمة سالبة ممكنة للعدد m في المجال المعطى هي (-20)، وبالتّالي قيمة العدد $\left(\frac{m}{10}\right)$ ستكون $\frac{(-20)}{10}=(-2)$. أي أنّه حينها قيمة الصّيغة الجبريّة $\left|\frac{m}{10}\right|$ ستكون $|(-2)|=2$.

في الحالتين حصلنا على 2 ← أكبر بُعد للعدد $\left(\frac{m}{10}\right)$ عن الصّفر ضمن المجال المعطى هو 2 ← أكبر قيمة ممكنة للصّيغة الجبريّة $\left|\frac{m}{10}\right|$ ضمن المجال المعطى هي 2.

---

6. أصغر قيمة ممكنة للقيمة المطلقة هي 0. هل من الممكن في هذه الحالة أن تكون قيمة الصّيغة $\left(\frac{m}{10}\right)$ تساوي 0 ؟
تكون قيمة الصّيغة $\left(\frac{m}{10}\right)$ تساوي 0 إذا كان قيمة العدد m هي 0، لأنّه عندها سنحصل على؛ $\frac{0}{10}=0$. العدد 0 يدخل في مجال العدد m المعطى في السّؤال. من هنا نستنتج أنّه من الممكن أن تكون قيمة الصّيغة $\left(\frac{m}{10}\right)$ تساوي 0، وفي هذه الحالة ستكون قيمة الصّيغة $\left|\frac{m}{10}\right|$ تساوي 0، وهي أصغر قيمة ممكنة في المجال المعطى.

---

7. نحن نبحث عن أكبر بُعد للعدد $(10-T)$ عن الصّفر ضمن مجال العدد T المعطى. لمن انتبه، أكبر بُعد للعدد $(10-T)$ عن الصّفر سنحصل عليه عندما يكون العدد T أصغر ما يكون بالسّالب، وذلك لأنّ قبل العدد T تظهر إشارة $(-)$، وبذلك العدد T سيتحوّل لموجب وسيكبُر.

أصغر قيمة للعدد T بالسّالب ضمن المجال المعطى هي (-5)، عندها قيمة العدد $(10-T)$ ستكون $(10-(-5))=10+5=(+15)$، وبالتّالي قيمة الصّيغة الجبريّة $|10-T|$ ستكون $|(+15)|=15$، وهي أكبر قيمة ممكنة لها ضمن مجال العدد T المعطى.

---

8. في هذا السّؤال نحن نبحث عن أصغر بُعد للعدد $(10-T)$ عن الصّفر ضمن مجال العدد T المعطى. في هذه الحالة، قيمة العدد $(10-T)$ لا يمكن أن تساوي 0، وذلك لأنّه كي تساوي 0 على قيمة العدد T أن تساوي 10، إلاّ أنّه ضمن المجال المعطى، قيمة العدد T لا يمكن أن تكون 10.

أصغر بُعد للعدد $(10-T)$ عن الصّفر في هذه الحالة سنحصل عليه في عندما تكون قيمة العدد T تساوي $(+5)$. وعندها قيمة العدد $(10-T)$ تكون $10-(+5)=5$، وبالتّالي قيمة الصّيغة الجبريّة $|10-T|$ ستكون $|(+5)|=5$، وهي أصغر قيمة ممكنة لها ضمن مجال العدد T المعطى.

---

9. بُعد العدد $(5-x)$ عن الصّفر هو 5 خطوات. من هنا، هنالك إمكانيّتان؛ أمّا أن تكون قيمة العدد $(5-x)$ هي $(+5)$، أو أن تكون (-5).

في حالة كانت قيمة العدد $(5-x)$ هي $(+5)$، تكون قيمة العدد x هي $(+10)$.

في حالة كانت قيمة العدد $(5-x)$ هي (-5)، تكون قيمة العدد x هي 0.

إذًا، قيم العدد x الممكنة هي $(+10)$ وَ 0.

---

10. بُعد العدد $(x-5)$ عن الصّفر هو 5 خطوات. من هنا، هنالك إمكانيّتان؛ أمّا أن تكون قيمة العدد $(x-5)$ هي $(+5)$، أو أن تكون (-5).

في حالة كانت قيمة العدد $(x-5)$ هي $(+5)$، تكون قيمة العدد x هي 0.

في حالة كانت قيمة العدد $(x-5)$ هي (-5)، تكون قيمة العدد x هي $(+10)$.

إذًا، قيم العدد x الممكنة هي 0 وَ $(+10)$.

المعادلات الذهبية - الشرح

هنالك 3 معادلات شائعة الاستعمال في امتحان البسيخومتريّ، والّتي تسهّل علينا في كثير من الأحيان حلّ أسئلة معيّنة، ولهذا ندعوها بالمعادلات "الذّهبيّة". مُعظمنا تعلّم هذه المعادلات وتعامل معها في المدرسة تحت عنوان "قوانين الضّرب المختصر".

لنتعرّف عليها أوّلاً:

دائمًا تذكّر-

✓ **المعادلات الذّهبيّة:**

1. $(a+b)^2 = a^2+b^2+2\cdot a\cdot b$
2. $(a-b)^2 = a^2+b^2-2\cdot a\cdot b$
3. $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$

لنأخذ بضعة أمثلة لاستعمال هذه المعادلات:

مثال

معطى أنّ $(a+b)^2=25$ وأنّ $a^2+b^2=15$. ما هي قيمة الصّيغة الجبريّة $a\cdot b$ ؟

الحلّ

نحاول مستخدمين المعطيات المعطاة في السّؤال أن نتوصّل إلى قيمة الصّيغة الجبريّة المطلوبة.

معطى أنّ $(a+b)^2=25$. المعادلة الذّهبيّة الأولى تنصّ على أنّه $(a+b)^2=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b$. من هنا:

$$(a+b)^2=25 \rightarrow a^2+b^2+2\cdot a\cdot b=25$$

معطى أيضًا أنّ $a^2+b^2=15$، لذلك:

$$\underbrace{a^2+b^2}_{15}+2\cdot a\cdot b=25$$

$$15 + 2\cdot a\cdot b=25$$

$$\Downarrow$$

$$2\cdot a\cdot b=10$$

$$\Downarrow$$

$$a\cdot b=5$$

إذًا، $a\cdot b=5$.

مثال

معطى أنّ $a^2+b^2=10$ وأنّ $a\cdot b=5$. ما هي قيمة الصّيغة الجبريّة $(a-b)^2$ ؟

الحلّ

الصّيغة الجبريّة $(a-b)^2$ المطلوبة هي عبارة عن المعادلة الذّهبيّة الثّانية، وهي مساوية لِـ$a^2+b^2-2\cdot a\cdot b$.

معطى أنّ $a^2+b^2=10$ وأنّ $a\cdot b=5$. من هنا؛

$$(a-b)^2=\underbrace{a^2+b^2}_{10}-\underbrace{2\cdot a\cdot b}_{2\cdot 5}=0$$

إذًا؛ $(a-b)^2=0$.

مثال

معطى أنّ $(a+b)=5$ وأنّ $(a-b)=10$. ما هي قيمة الصّيغة الجبريّة a^2-b^2 ؟

الحلّ

الصّيغة الجبريّة a^2-b^2 المطلوبة هي عبارة عن المعادلة الذّهبيّة الثّالثة، وهي مساوية لِـ$(a+b)\cdot(a-b)$.

معطى أنّ $(a+b)=5$ وأنّ $(a-b)=10$. من هنا؛

$$a^2-b^2=\underbrace{(a+b)}_{5}\cdot\underbrace{(a-b)}_{10}=50$$

مثال

معطى أنّ $(a+b)=5$ وأنّ $a\cdot b=5$. ما هي قيمة الصّيغة الجبريّة a^2+b^2 ؟

الحلّ

$(a+b)=5$ ، ولذلك $(a+b)^2=5^2=25$.

المعادلة الذّهبيّة الأولى تنصّ على أنّه $(a+b)^2=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b$. من هنا؛

$$a^2+b^2+2\cdot a\cdot b=25$$

معطى أيضًا أنّ $a\cdot b=5$ ، لذلك؛

$$a^2 + b^2 + \underbrace{2 \cdot a \cdot b}_{2 \cdot 5 = 10} = 25$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 + b^2 + 10 = 25$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 + b^2 = 15$$

إليكم الآن أعزّاءنا مجموعة من أسئلة التّمرُّن لتتأكّدوا من فَهمكم لموضوع المعادلات الذّهبيّة...

المعادلات الذهبية - الأسئلة

.1 معطى أنّ $(a+b)^2=10$ وأنّ $a\cdot b=3$. ما هي قيمة الصّيغة الجبريّة a^2+b^2 ؟

.2 معطى أنّ $(a+b)^2=50$ وأنّ $a^2+b^2=10$. ما هي قيمة الصّيغة الجبريّة $a\cdot b$ ؟

.3 معطى أنّ $(a-b)^2=30$ وأنّ $a\cdot b=11\frac{1}{2}$. ما هي قيمة الصّيغة الجبريّة a^2+b^2 ؟

.4 معطى أنّ $(a-b)^2=10$ وأنّ $a^2+b^2=10$. ما هي قيمة الصّيغة الجبريّة $a\cdot b$ ؟

.5 معطى أنّ $a^2-b^2=20$ وأنّ $(a+b)=5$. ما هي قيمة الصّيغة الجبريّة $(a-b)$ ؟

.6 معطى أنّ $a+b=6$ وأنّ $(a-b)=2\cdot(a+b)$. ما هي قيمة الصّيغة الجبريّة a^2-b^2 ؟

.7 معطى أنّ $a^2+b^2=20$ وأنّ $a\cdot b=8$. ما هي قيمة الصّيغة الجبريّة $|(a+b)|$ ؟

.8 معطى أنّ $a^2+b^2=20$ وأنّ $(a+b)^2=40$. ما هي قيمة الصّيغة الجبريّة $(a-b)^2$ ؟

.9 معطى أنّ $(a-b)=14$ وأنّ $a\cdot b=100$. ما هي قيمة الصّيغة الجبريّة a^2+b^2 ؟

.10 معطى أنّ $(a-b)=5$ وأنّ $a^2-2ab=21$. ما هي قيمة الصّيغة الجبريّة b^2 ؟

المعادلات الذهبية - الحلول المفصلة

.1 المعادلة الذّهبيّة الأولى تنصّ على أنّ $(a+b)^2 = a^2+b^2+2\cdot a\cdot b$. لذلك؛

$$a^2+b^2+2\cdot a\cdot b=10$$

معطى أيضًا أنّ $a\cdot b=3$. لذلك؛

$$a^2+b^2+\underbrace{2\cdot a\cdot b}_{2\cdot 3=6}=10$$

$$\Downarrow$$

$$a^2+b^2+\quad 6 \quad =10$$

$$\Downarrow$$

$$a^2+b^2 \qquad =4$$

إذًا، $a^2+b^2=4$.

.2 المعادلة الذّهبيّة الأولى تنصّ على أنّ $(a+b)^2 = a^2+b^2+2\cdot a\cdot b$. لذلك؛

$$a^2+b^2+2\cdot a\cdot b=50$$

معطى أيضًا أنّ $a^2+b^2=10$. لذلك؛

$$\underbrace{a^2+b^2}_{10}+2\cdot a\cdot b=50$$

$$\Downarrow$$

$$10 \quad +2\cdot a\cdot b=50$$

$$\Downarrow$$

$$2\cdot a\cdot b=40$$

$$\Downarrow$$

$$a\cdot b=20$$

إذًا، $a\cdot b=20$.

.3 المعادلة الذّهبيّة الثّانية تنصّ على أنّ $(a-b)^2 = a^2+b^2-2\cdot a\cdot b$. لذلك؛

$$a^2+b^2-2\cdot a\cdot b=60$$

$a\cdot b=11\frac{1}{2}$، ولذلك $a\cdot b=23$. من هنا؛

$$\underbrace{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b}_{}=30$$

$$a^2+b^2-\underbrace{2\cdot a\cdot b}_{2\cdot 23=46}=30$$

$$\Downarrow$$

$$a^2+b^2-\quad 46 \quad =30$$

$$\Downarrow$$

$$a^2+b^2 \qquad =76$$

إذًا، $a^2+b^2=76$.

---

4. المعادلة الذّهبيّة الثّانية تنصّ على أنّ $(a-b)^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b$. لذلك؛

$$a^2+b^2-2\cdot a\cdot b=10$$

معطى أيضًا أنّ $a^2+b^2=10$. لذلك؛

$$\underbrace{a^2+b^2}_{10}-2\cdot a\cdot b=10$$

$$\Downarrow$$

$$10 \quad -2\cdot a\cdot b=10$$

$$\Downarrow$$

$$-2\cdot a\cdot b=0$$

$$\Downarrow$$

$$a\cdot b=0$$

إذًا، $a\cdot b=0$.

---

5. المعادلة الذّهبيّة الثّالثة تنصّ على أنّ $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$. لذلك؛

$$\underbrace{a^2-b^2}_{20}=\underbrace{(a+b)}_{5}\cdot(a-b)$$

$$\Downarrow$$

$$4 \quad = \quad (a-b)$$

إذًا، $(a-b)=4$.

---

6. معطى أنّ $(a+b)=6$، وأنّ $(a-b)=2\cdot(a-b)$، ولذلك $(a-b)=2\cdot 6=12$.

المعادلة الذّهبيّة الثّالثة تنصّ على أنّ $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$. لذلك؛

$$a^2-b^2=\underbrace{(a+b)}_{6}\cdot\underbrace{(a-b)}_{12}$$

$$a^2-b^2=6\cdot 12$$

$$\Downarrow$$

$$a^2-b^2=72$$

إذًا، $a^2-b^2=72$.

---

7. المعادلة الذّهبيّة الأولى تنصّ على أنّ $(a+b)^2=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b$. معطى أيضًا أنّ $a^2+b^2=20$ ، وأنّ $a\cdot b=8$ ، لذلك؛

$$(a+b)^2=\underbrace{a^2+b^2}_{20}+\underbrace{2\cdot a\cdot b}_{2\cdot 8=16}$$

$$\Downarrow$$

$$(a+b)^2=20+16$$

$$\Downarrow$$

$$(a+b)^2=36$$

توصّلنا إلى أنّ $(a+b)^2=36$. ما هو العدد الّذي عندما نربّعه نحصل على 36 ؟ $\leftarrow$ هنالك إمكانيّتان؛ إمّا $(a+b)=6$ أو $(a+b)=(-6)$. وفي الحالتين سنحصل على أنّ $|(a+b)|=6$.

إذًا، $|(a+b)|=6$.

---

8. المعادلة الذّهبيّة الأولى تنصّ على أنّ $(a+b)^2=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b$. معطى أنّ $a^2+b^2=20$. لذلك؛

$$\underbrace{a^2+b^2}_{20}+2\cdot a\cdot b=40$$

$$20+2\cdot a\cdot b=40$$

$$\Downarrow$$

$$2\cdot a\cdot b=20$$

$$\Downarrow$$

$$a\cdot b=10$$

معطى أنّ $a^2+b^2=20$ ، ووجدنا أنّ $a\cdot b=10$.

المعادلة الذّهبيّة الثّانية تنصّ على أنّ $(a-b)^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b$. لذلك؛

$$(a-b)^2=\underbrace{a^2+b^2}_{20}-\underbrace{2\cdot a\cdot b}_{2\cdot 10=20}$$

$$\Downarrow$$

$$(a-b)^2=20-20=0$$

إذًا، $(a-b)^2=0$.

---

9. معطى أنّ $(a-b)=14$، لذلك؛ $196=14^2=(a-b)^2 \leftarrow 196=(a-b)^2$.

المعادلة الذّهبيّة الثّانية تنصّ على أنّ $(a-b)^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b$، ومعطى أيضًا أنّ $a\cdot b=100$. لذلك؛

$$a^2+b^2-\underbrace{2\cdot a\cdot b}_{2\cdot 100=200}=196$$

$$\Downarrow$$

$$a^2+b^2-200=196$$

$$\Downarrow$$

$$a^2+b^2=396$$

إذًا، $a^2+b^2=396$.

---

10. المعادلة الذّهبيّة الثّانية تنصّ على أنّ $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab \leftarrow (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. معطى أنّ $(a-b)=5$، وأنّ $a^2-2ab=21$، لذلك؛

$$\underbrace{(a-b)^2}_{5^2}=\underbrace{a^2-2ab}_{21}+b^2$$

$$\Downarrow$$

$$25=21+b^2$$

$$\Downarrow$$

$$4=b^2$$

إذًا، $b^2=4$.
